

QUESTION 1 – Flambage d'une poutre

(10 points)

Une poutre mono-matériau de longueur L est encadrée en A, voir la Figure 1.1. La section de la poutre est illustrée en figure 1.2. Pour cette section, nous avons $a < b$.

Une force axiale F est appliquée à l'extrémité de la poutre.

Le module de Young de la poutre est E . La contrainte à la rupture du matériau est σ_{yield} .

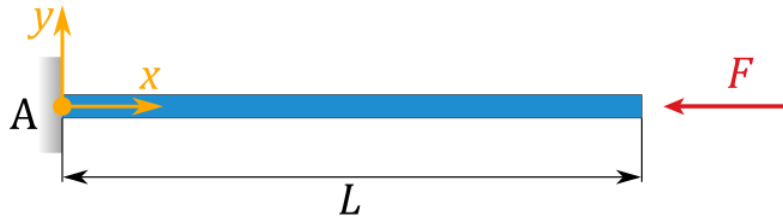


Figure 1.1: Poutre encadrée sujet à une force axiale F .

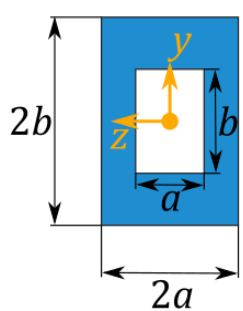
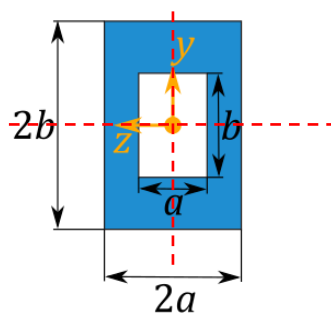


Figure 1.2: Section de la poutre. Le matériau est en bleu. La poutre est creuse.

➤ Q1a) (1 pt)

- Où se situe l'axe neutre de la poutre ? Donner la valeur de y_0 dans le plan xy , et la valeur de z_0 dans le plan xz .

➔ Les axes neutres sont situés au centre du rectangle : $y_0 = 0$; $z_0 = 0$



➤ **Q1b) (3 pts)**

- Calculer les Moments quadratiques I_{y,z_0} et I_{z,y_0} de la poutre.

Soit en utilisant $I = \frac{wh^3}{12}$:

$$\rightarrow I_{y,z_0} = I_{y,z_0,grande} - I_{y,z_0,petit} = \frac{2b(2a)^3}{12} - \frac{ba^3}{12} = \frac{15}{12}ba^3$$

$$\rightarrow I_{z,y_0} = I_{z,y_0,grande} - I_{z,y_0,petit} = \frac{2a(2b)^3}{12} - \frac{ab^3}{12} = \frac{15}{12}ab^3$$

Soit en Utilisant des intégrales:

$$\begin{aligned} \rightarrow I_{y,z_0} &= \iint_{A_{grande}} (z - z_0)^2 dA - \iint_{A_{petit}} (z - z_0)^2 dA \\ &= \int_{-a}^a \left(\int_{-b}^b dy \right) z^2 dz - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \right) z^2 dz \\ &= \frac{2b(2a)^3}{12} - \frac{ba^3}{12} = \frac{15}{12}ba^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I_{z,y_0} &= \iint_{A_{grande}} (y - y_0)^2 dA - \iint_{A_{petit}} (y - y_0)^2 dA \\ &= \int_{-b}^b \left(\int_{-a}^a dz \right) y^2 dy - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \right) y^2 dy \\ &= \frac{2a(2b)^3}{12} - \frac{ab^3}{12} = \frac{15}{12}ab^3 \end{aligned}$$

➤ **Q1c) (6 pts)**

- Trouver la longueur L_1 pour laquelle la force F sera la même pour une défaillance par flambage et pour une défaillance par une rupture du matériau.

- Exprimer L_1 en fonction seulement de a, b, σ_{yield} , et E .

➔ $a < b$ alors, $I_y < I_z$ -> on utilise I_y pour trouver la défaillance par flambage.

Fixé-libre poutre -> $L_{eff} = 2L$.

$$n = 1$$

$$\rightarrow F_{crit,flambage} = \left(\frac{n\pi}{L_{eff}} \right)^2 EI = \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 E \frac{15}{12}ba^3 = \frac{15}{48}\pi^2 \frac{Eba^3}{L^2}$$

$$\rightarrow F_{crit,rupture} = A_{section} \sigma_{yield} = 3ab\sigma_{yield}$$

$$\rightarrow F_{crit,rupture} = F_{crit,flambage}$$

$$\frac{15}{48}\pi^2 \frac{Eba^3}{L^2} = 3ab\sigma_{yield}$$

$$L = \pi a \sqrt{\frac{5}{48} \frac{E}{\sigma_{yield}}} \quad (\text{si } a < b)$$

QUESTION 2 – Poutre composite encastree

(29 points)

Une poutre composite de longueur L et de masse n'egligeable est encastree en A, voir la Figure 2.1. Un support fixe en B bloque la translation de la poutre dans la direction y a une distance $l = \frac{4L}{5}$ de l'encastrement. La poutre est soumise a une force distribuee d'intensite f [N/m].

La section de la poutre est illustree en figure 2.2. La poutre est composee de deux mat'eriaux. Le mat'eriau en vert a un module de Young E_1 . Le mat'eriau en bleu a un module de Young $E_2 = 2E_1$.

L'axe neutre de la poutre composite se trouve a $y_0 = \frac{8a}{9}$ du bas de la poutre (voir systeme de coordonnees en figure 2.2).

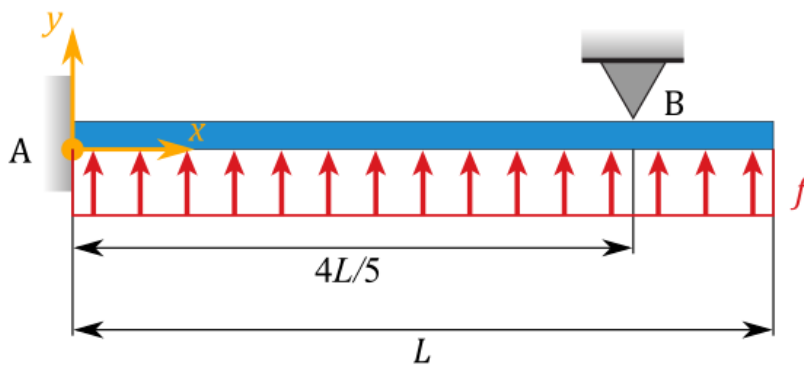


Figure 2.1: Poutre encastree en $x = 0$, sujet a une force distribuee f .
Un support en B bloque la translation en y .

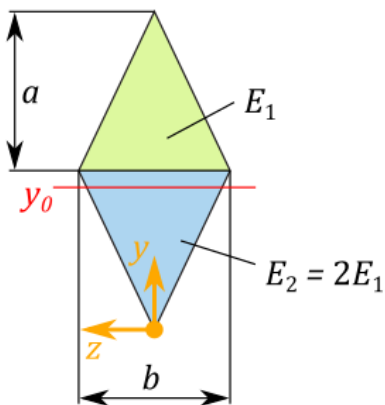


Figure 2.2: Section de la poutre composite.

Indice:

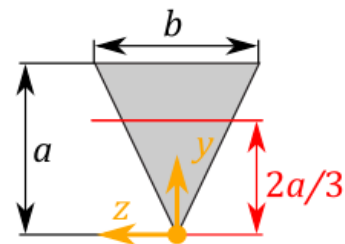


Figure 2.3: Le moment quadratique I_z d'une section triangulaire par rapport a l'axe neutre du triangle, qui est situee a une distance $2a/3$ de l'origine, est $I_z = \frac{a^3 b}{36}$

➤ **Q2a) (6 pts)**

- Calculer la rigidité en flexion $\langle EI_{z,y_0} \rangle$ de la poutre en fonction seulement de a , b , et E_1 .
- Indice: Vous pouvez vous aider de la figure 2.3.

Method 1: Steiner theorem

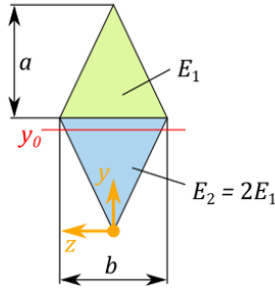


Figure 2.2: Section de la poutre composite.

Indice:

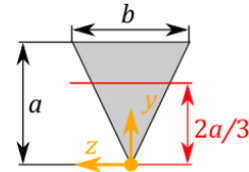


Figure 2.3: Le moment quadratique I_z d'une section triangulaire par rapport à l'axe neutre du triangle, qui est située à une distance $2a/3$ de l'origine, est $I_z = \frac{a^3b}{36}$

The flexural stiffness $\langle EI_{z,y_0} \rangle$ evaluated from the section neutral axis is given by the sum of each contribution coming from each material:

$$(a.1) \quad \langle EI_{z,y_0} \rangle = \sum_i E_i I_{z,y_{0i}} = E_1 I_{z,y_{01}} + E_2 I_{z,y_{02}}$$

We use the Steiner theorem to calculate the moments of inertia of each part of the section. Naming \hat{y}_i the y coordinate of the neutral axis of part i in the reference system of Figure 2.2 and A_i its surface area, we have:

$$(a.2) \quad I_{z,y_{0i}} = I_z + A_i (\hat{y}_i - y_0)^2$$

Plugging y_0 and the given parameters into (a.2) gives:

$$(a.3) \quad I_{z,y_{01}} = \frac{a^3b}{36} + \frac{ab}{2} \left(\frac{4a}{3} - \frac{8a}{9} \right)^2 = \frac{41}{324} a^3b$$

$$(a.4) \quad I_{z,y_{02}} = \frac{a^3b}{36} + \frac{ab}{2} \left(\frac{2a}{3} - \frac{8a}{9} \right)^2 = \frac{17}{324} a^3b$$

which then can be used in (a.1):

$$(a.5) \quad \langle EI_{z,y_0} \rangle = E_1 I_{z,y_{01}} + E_2 I_{z,y_{02}} = \frac{41}{324} E_1 a^3b + \frac{17}{162} E_1 a^3b = \frac{25}{108} E_1 a^3b$$

Method 2: integration method

In case the student decides to calculate the moments of inertia by integration, they are obtained by solving the integrals:

$$(a.6) \quad I_{z,y_{0i}} = \iint_{A_i} (y - y_0)^2 dA = \int_{A_i} (y - y_0)^2 W(y) dy$$

where $W(y)$ is the side width along z at coordinate y of the i -th element.

Plugging y_0 and the given parameters and geometries into (a.6) gives:

$$(a.7) \quad I_{z,y_{01}} = \int_a^{2a} (y - y_0)^2 W(y) dy = \int_a^{2a} (y - y_0)^2 \left(2b - \frac{b}{a}y \right) dy = \frac{41}{324} a^3b$$

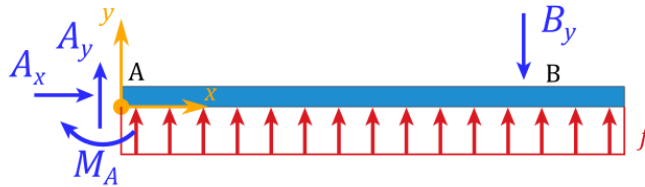
$$(a.8) \quad I_{z,y_{02}} = \int_0^a (y - y_0)^2 W(y) dy = \int_0^a (y - y_0)^2 \left(\frac{b}{a}y \right) dy = \frac{17}{324} a^3b$$

which then can be used in (a.1).

Q2b) (14 pts)

- Dessiner le diagramme des forces de la poutre
 - Identifier les inconnues. Indiquer le nombre d'équations de la statique
 - Calculer la flèche $w(x)$ le long de la poutre en fonction seulement de x, f, L , et $\langle EI_{z,y_0} \rangle$.
- Indice: Vous pouvez utiliser la superposition.

The **Free Body Diagram** of the beam is



The number of unknowns is **4**, the number of equations for static equilibrium is **3**.

So INDETERMINATE!

The given beam can be expressed as the combination of the two following systems from Tableau 2.4 (deflections assumed positive in the y direction of the Free Body Diagram):

$v = -\frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2)$	$v = -\frac{Px^2}{6EI} (3a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$ $v = -\frac{Pa^2}{6EI} (3x - a) \quad (a \leq x \leq L)$
$w_1(x) = \frac{f x^2}{24 \langle EI_{z,y_0} \rangle} (6L^2 - 4Lx + x^2)$	$w_2(x) = \begin{cases} -\frac{B_y x^2}{6 \langle EI_{z,y_0} \rangle} \left(\frac{12L}{5} - x \right); & 0 \leq x \leq \frac{4L}{5} \\ -\frac{8 B_y L^2}{75 \langle EI_{z,y_0} \rangle} \left(3x - \frac{4L}{5} \right); & \frac{4L}{5} < x \leq L \end{cases}$

The beam deflection $w(x)$ of the given system can then be expressed as combination of the two cases:

(b.1)
$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

By applying the compatibility equation given by the pivot in B, we can express the reaction force B_y as function of x, f, L , and $\langle EI_{z,y_0} \rangle$:

(b.2)
$$w\left(x = \frac{4L}{5}\right) = w_1\left(x = \frac{4L}{5}\right) + w_2\left(x = \frac{4L}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{172 f L^4}{1875 \langle EI_{z,y_0} \rangle} - \frac{64 B_y L^3}{375 \langle EI_{z,y_0} \rangle} = 0$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{43 f L}{80}$$

By replacing the calculated value for B_y in (b.1) we can obtain the beam deformation function:

(b.3)
$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{f x^2}{24 \langle EI_{z,y_0} \rangle} (6L^2 - 4Lx + x^2) - \frac{43 f L x^2}{480 \langle EI_{z,y_0} \rangle} \left(\frac{12L}{5} - x \right); & 0 \leq x \leq \frac{4L}{5} \\ \frac{f x^2}{24 \langle EI_{z,y_0} \rangle} (6L^2 - 4Lx + x^2) - \frac{43 f L^3}{750 \langle EI_{z,y_0} \rangle} \left(3x - \frac{4L}{5} \right); & \frac{4L}{5} < x \leq L \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{f x^2 (84L^2 - 185Lx + 100x^2)}{2400 \langle EI_{z,y_0} \rangle}; & 0 \leq x \leq \frac{4L}{5} \\ \frac{f x^2}{24 \langle EI_{z,y_0} \rangle} (6L^2 - 4Lx + x^2) + \frac{43 f L^3}{3750 \langle EI_{z,y_0} \rangle} (15x - 4L); & \frac{4L}{5} < x \leq L \end{cases}$$

➤ **Q2c) (9 pts)**

À $x = 0$ (c'est à dire à l'encastrement):

- Trouver la contrainte maximale $|\sigma_x|$ dans la poutre en fonction seulement de a, f, L, E_1 et $\langle EI_{z,y_0} \rangle$.
- La poutre est-elle en compression ou en traction au point où la contrainte $|\sigma_x|$ est maximale ? justifier votre réponse.

To find the maximum normal stress $|\sigma_x|$ at the clamped end A, we first need to calculate the internal forces acting on the extremity of the beam, which correspond to the reaction forces A_x, A_y and M_A . We can evaluate them by solving the static equilibrium while using the result for B_y calculated in (b.2):

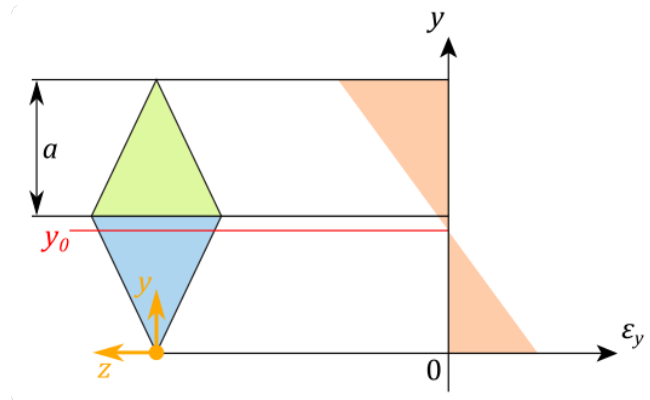
$$(c.1) \quad A_x = 0$$

$$(c.2) \quad fL + A_y - B_y = 0 \Rightarrow A_y = -\frac{37 f L}{80}$$

$$(c.3) \quad M_A - \frac{fL^2}{2} + \frac{4L}{5} B_y = 0 \Rightarrow M_A = \frac{7 f L^2}{100}$$

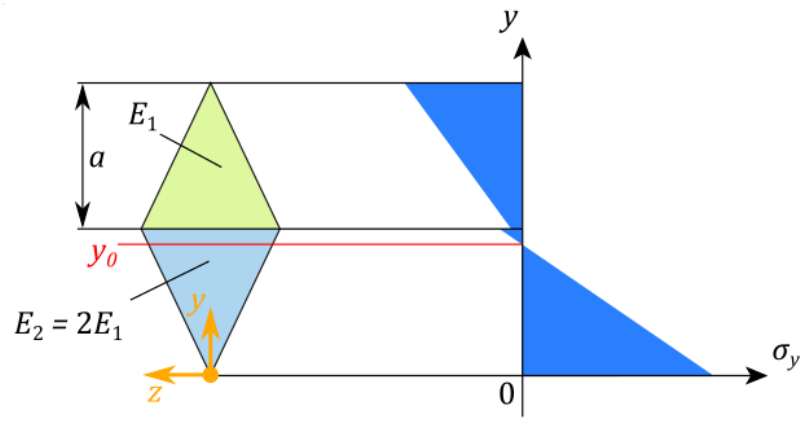
The section A undergoes pure bending. The normal strain distribution $\varepsilon_x(y)$ at section A follows:

$$(c.4) \quad \varepsilon_x(y) = -\frac{M_A}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0) = -\frac{7 f L^2}{100 \langle EI_{z,y_0} \rangle} \left(y - \frac{8a}{9} \right)$$



The normal stress distribution $\sigma_x(y)$ is obtained by multiplying $\varepsilon_x(y)$ for the Young's modulus of the material at y :

$$(c.5) \quad \sigma_x(y) = \begin{cases} E_2 \varepsilon_x(y) & 0 \leq y < a \\ E_1 \varepsilon_x(y) & a < y \leq 2a \end{cases} = \begin{cases} -\frac{7 E_1 f L^2}{50 \langle EI_{z,y_0} \rangle} \left(y - \frac{8a}{9} \right) & 0 \leq y < a \\ -\frac{7 E_1 f L^2}{100 \langle EI_{z,y_0} \rangle} \left(y - \frac{8a}{9} \right) & a < y \leq 2a \end{cases}$$



The maximum stress $|\sigma_x|$ is given by evaluating $\sigma_x(y)$ at $y = 0$:

(c.6)
$$|\sigma_x| = |\sigma_x(y = 0)| = \frac{28 E_1 a f L^2}{225 (E I_{z, y_0})}$$

The beam is under **tension** at $y = 0$, because $\sigma_x(y = 0) > 0$.